Kesikli Parametreli Markov Zinciri

Tanım 1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ bir olasılık uzayı ve bu uzayda tanımlı kesikli parametreli kesikli durum uzaylı $\{ X_n, n \geq 0 \}$ süreci aşağıdaki koşulu sağlarsa bu sürece kesikli parametreli Markov zinciri denir.

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} / \ X_1 = x_1, \ X_2 = x_2 , \dots , X_n = x_n)$$

$$= \ P(X_{n+1} = x_{n+1} / X_n = x_n)$$

Bu özellik belleksizlik özelliği veya Markov özelliği olarak bilinir. $x_i \in E$; $i = 1,2, \dots \ , n$. Burada X_n lerin her biri $E = N = \{0, 1, \ 2, \ \dots \}$ kümesinden değerler alan tesadüfi değişkenlerdir. Burada E durum uzayıdır. Markov zincirinin geçmiş ve geleceği birbirinden bağımsızdır.

Tanım 2. $p_{i,j}(m,n) = \ P(X_{m+n} = j / X_m = i) , \quad i,j \in E$

Bu koşullu olasılığa geçiş olasılığı denir. Eğer bu olasılık yalnızca n zamanına bağlı m zamanına bağlı değil ise bu zincire homojen Markov zinciri denir.

$$p_{i,j}(n) = \ p_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j / X_m = i), \ \ i,j \in E.$$

Bununla birlikte bu olasılığa n adım geçiş olasılığı denir. Burada $n = 1$ alınırsa

$$p_{ij}^{(1)} = P(X_{m+1} = j / X_m = i), \quad i,j \in E.$$

Bu olasılığa da 1 adım geçiş olasılığı denir ve $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ ile de gösterilebilir. $n = 0$ için,

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Ayrıca sürecin başlangıç anında i durumunda olması olasılığı ise

$$p_i = P(X_0 = i), \ \ i \in E.$$

Stokastik Matris

Tanım 3. $V = (v_1, \ v_2 , \dots , v_n)$ vektörü $\forall \, v_j \in V \ için \ v_j \geq 0$ ve $\sum_{j \in E} v_j = 1$ koşullarını sağlıyorsa , V vektörüne *olasılık vektörü* denir. Her satırı bir olasılık vektörü olan bir kare matrise ***Stokastik Matris* veya *Markov Matrisi*** denir. Özel olarak bir Stokastik matrisinin sütunlar toplamı 1 ise bu matrise *Çift Stokastik Matris* denir.

Teorem 1. $A = [a_{ij}]$ matrisi nxn boyutlu Stokastik matris ve V de n elemanlı olasılık vektörü ise VA da bir olasılık vektörüdür.

İspat. $$VA = (\, v_1, \, , \ldots \, , v_n \,) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= (v_1 a_{11} + \ldots + v_n a_{n1} \, , \; \ldots \; , v_1 a_{1n} + \ldots + v_n a_{nn})$$

$$= v_1(a_{11} + \cdots + a_{1n}) + \ldots + v_n(a_{n1} + \cdots + a_{nn})$$

$\sum_{j \in E} a_{ij} = 1$ olduğundan $v_1 + \ldots + v_n = 1$ olur, böylece

Teorem 2. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ aynı boyutlu stokastik matrisler ise AB = *C* de bir Stokastik matristir.

İspat. $$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \left(a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

olur.

$$\sum_{j \in E} c_{ij} = \sum_{j \in E} \left(a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}\right) = (a_{i1} + \cdots + a_{in}) = 1$$

Yukarıdaki işlemlerden görüldüğü üzere $AB = C$ matrisin her bir satır toplamı 1 olduğundan AB matrisi de bir stokastik matristir. Böylece bir Stokastik matrisin *k*-ıncı kuvvetinin de yine bir Stokastik matris olduğu aşikardır.